Основы теории управления

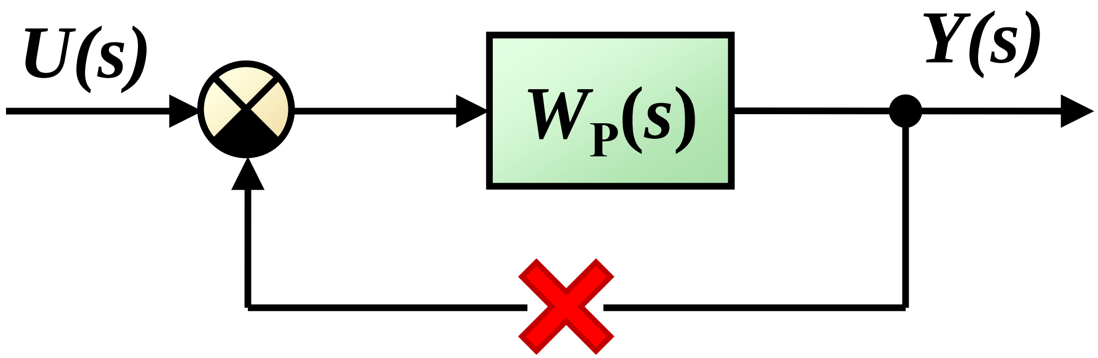
Критерий Найквиста

Метод D-разбиения

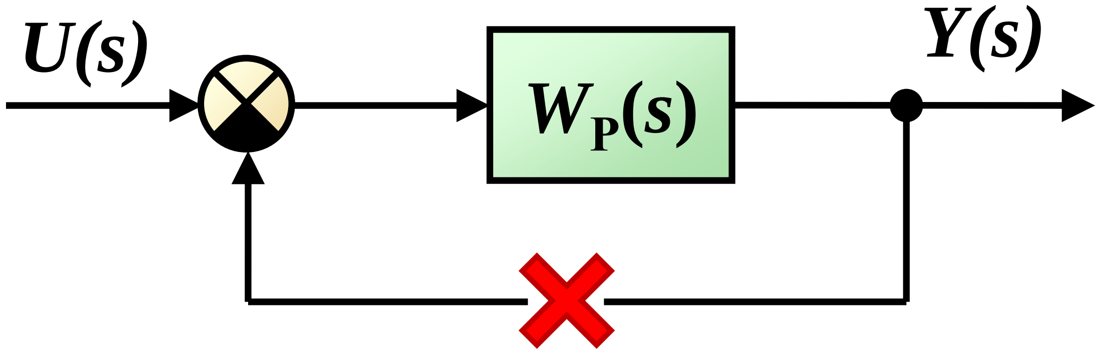
Критерий Г. Найквиста

Критерий применим для систем с отрицательной обратной связью.

Критерий позволяет определить устойчивость замкнутой системы по амплитудно-фазовой характеристике и устойчивости разомкнутой системы.



Критерий Г. Найквиста



Передаточная функция разомкнутой системы:

$$W_P(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$$

Заменяя **s** на $j\omega$, переходим в частотную область:

$$W_P(j\omega) = \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)}$$

Критерий Г. Найквиста

Передаточная функция замкнутой системы:

$$W_З(s) = \frac{W_P(s)}{1 + W_P(s)}$$

Заменяя **s** на $j\omega$, переходим в частотную область:

$$W_З(j\omega) = \frac{W_P(j\omega)}{1 + W_P(j\omega)}$$

Вычислим знаменатель:

$$1 + W_P(j\omega) = 1 + \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{P(j\omega) + Q(j\omega)}{Q(j\omega)} \qquad (1)$$

Критерий Г. Найквиста

Передаточная функция замкнутой системы:

$$W_З(j\omega)=\frac{P(j\omega)}{P(j\omega)+Q(j\omega)}$$

Таким образом, годограф Михайлова для разомкнутой системы строится по формуле:

$$M_P(j\omega)=Q(j\omega)$$

а для замкнутой системы – по формуле:

$$M_З(j\omega)=P(j\omega)+Q(j\omega)$$

Критерий Г. Найквиста

Вернемся к формуле (1)

$$1+W_P(j\omega)=1+\frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)}=\frac{P(j\omega)+Q(j\omega)}{Q(j\omega)} \qquad (1)$$

В числителе - уравнение годографа Михайлова для замкнутой системы, а в знаменателе - для разомкнутой системы.

1. Предположим, что разомкнутая система устойчива.

При изменении частоты от 0 до $+\infty$ фаза ***Q(jω)*** будет равна:

$$\varphi_Q=\pi\frac{n}{2}$$

Критерий Г. Найквиста

Порядок характеристического уравнения замкнутой системы такой же, как для разомкнутой, поскольку степень ***P(jω)*** меньше степени ***Q(jω)*** .

При изменении частоты от 0 до $+\infty$ фаза ***P(jω) +Q(jω)*** будет равна:

$$\varphi_{P+Q} = \frac{\pi}{2}\left(n - 2k\right)$$

k – количество правых частей характеристического уравнения разомкнутой системы.

Критерий Г. Найквиста

Изменение фазы вектора (1) при возрастании частоты от 0 до $+\infty$ будет равно разности

$$\varphi_{1+W_P} = \varphi_{P+Q} - \varphi_Q = \frac{\pi}{2}(n-2k) - \frac{\pi}{2}n = -\pi k$$

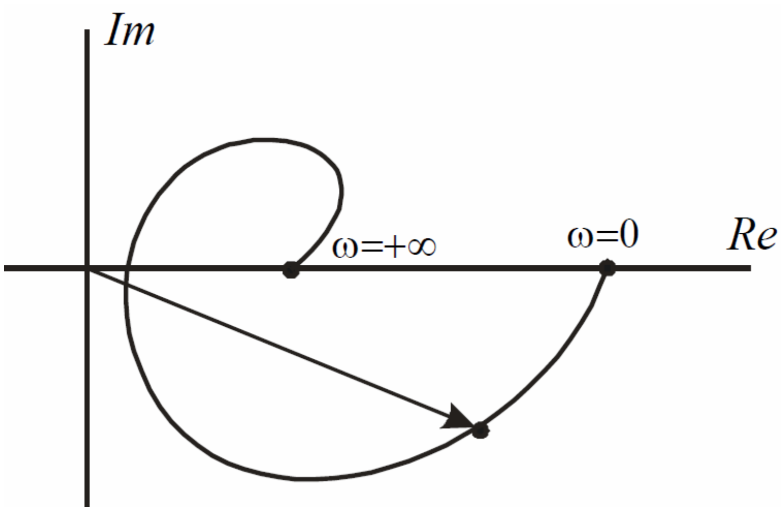
Для устойчивости замкнутой системы необходимо, чтобы правых корней не было, тогда

$$\varphi_{1+W_P} = 0$$

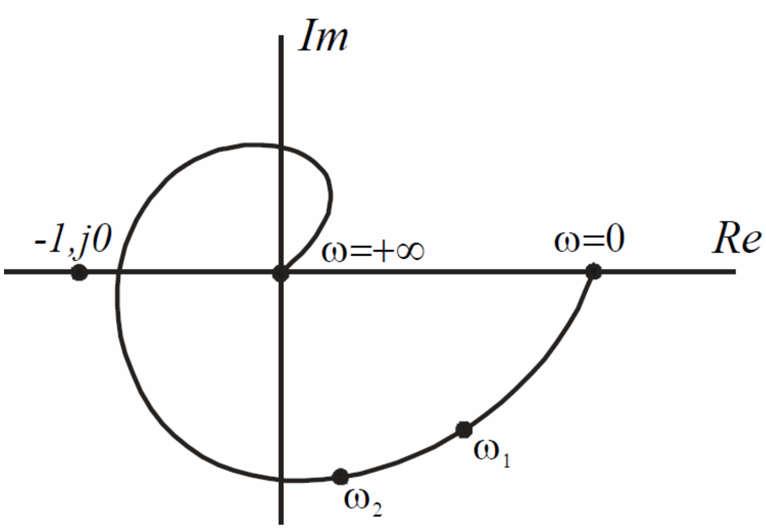
при изменении частоты от 0 до $+\infty$.

Критерий Г. Найквиста

Изобразим на комплексной плоскости годограф $1+W_P(j\omega)$:

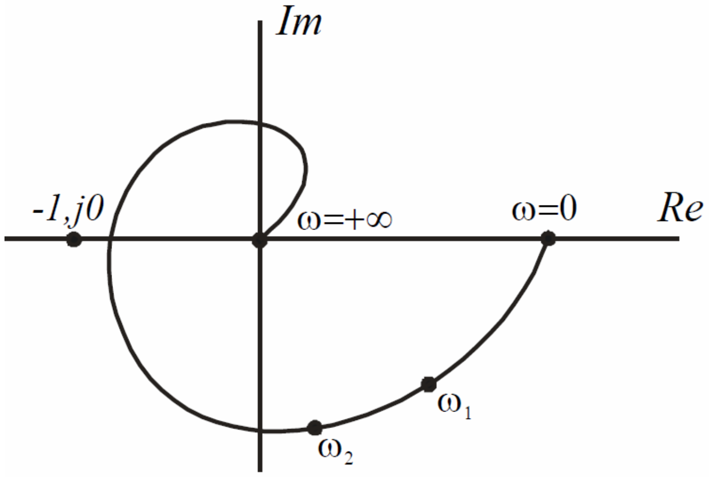


$\varphi_{1+W_P} = 0$, если годограф не охватывает начало координат.



Амплитудно-фазовая характеристика $W_P(j\omega)$

Критерий Г. Найквиста



Амплитудно-фазовая характеристика $W_P(j\omega)$

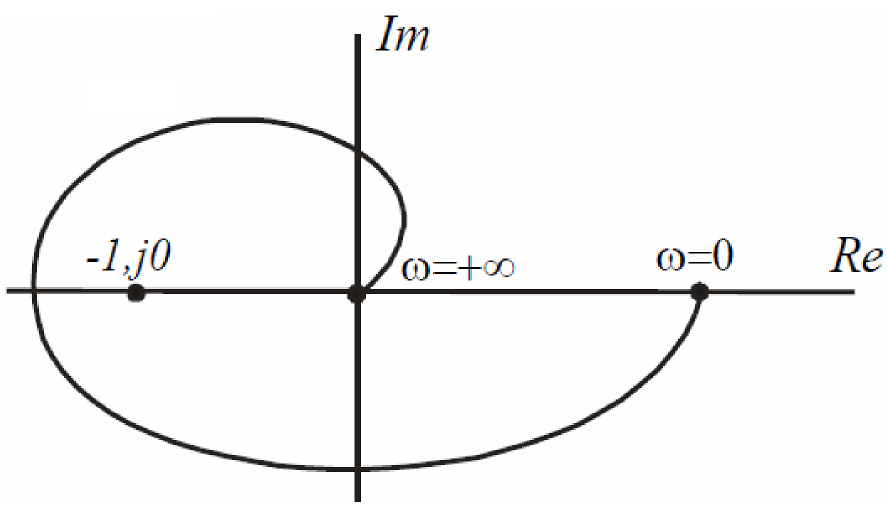
Критическая точка на плоскости: $(-1, j0)$.

Вывод 1: Если система в разомкнутом состоянии устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы при изменении частоты от 0 до $+\infty$ не охватывала точку комплексной плоскости с координатами (−1, j0).

Критерий Г. Найквиста

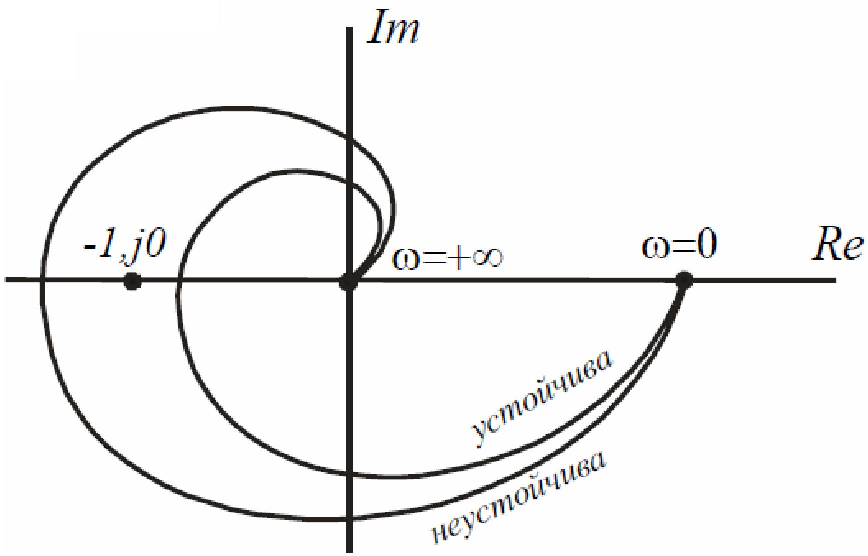
2. Если разомкнутая система неустойчива.

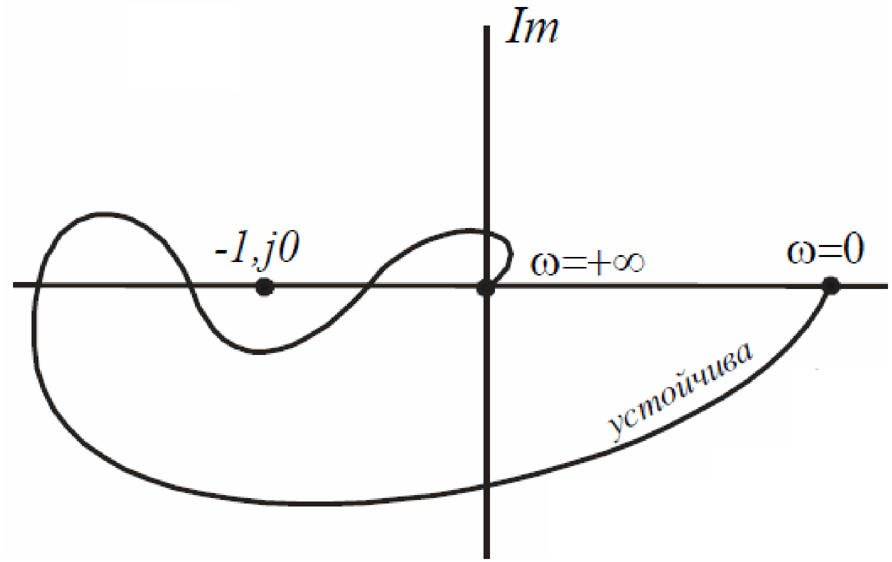
Вывод 2: Если система в разомкнутом состоянии **неустойчива и её характеристическое уравнение имеет k правых корней, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы частотная характеристика разомкнутой системы при изменении частоты от 0 до +∞ охватывала точку комплексной плоскости с координатами** (−1, j0) **k/2 раз.**

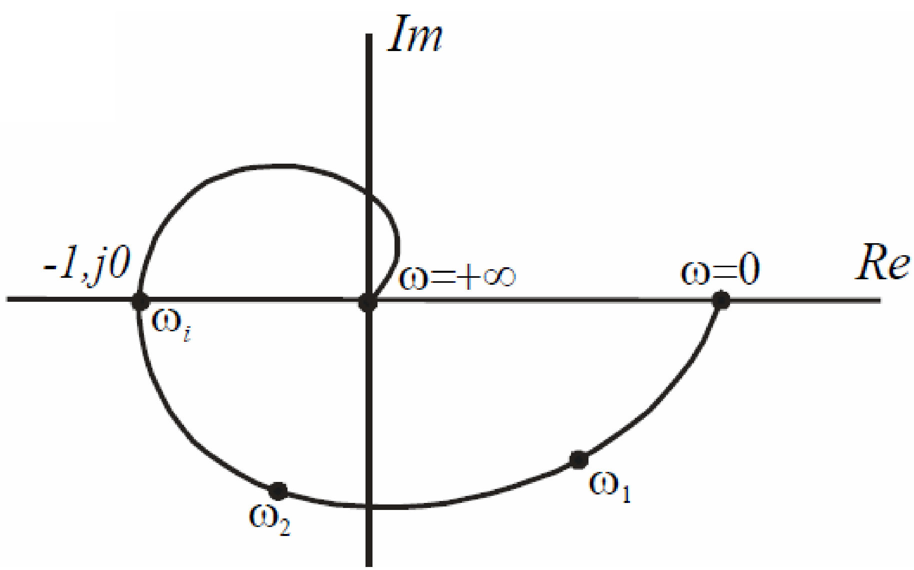


k = 2

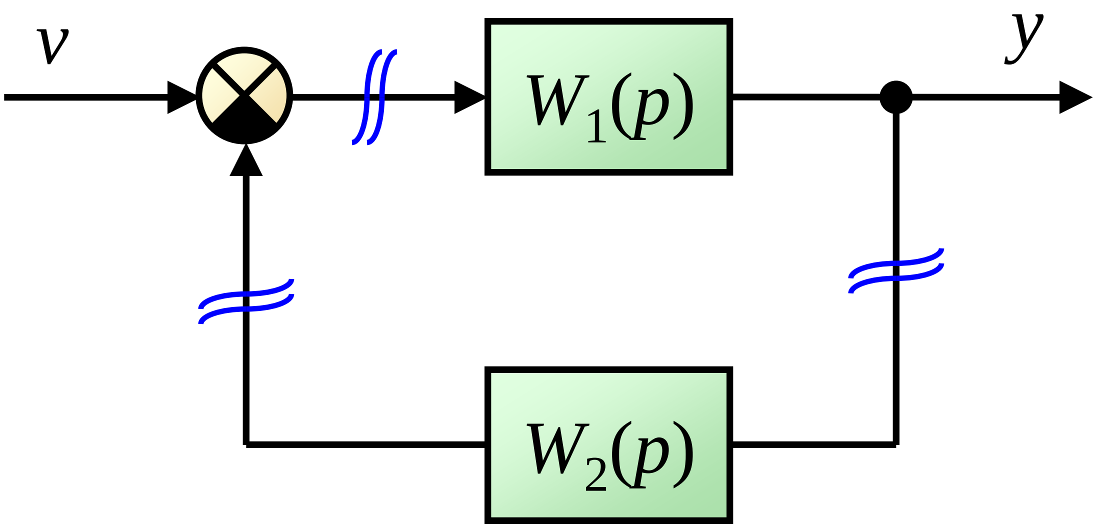
Критерий Г. Найквиста







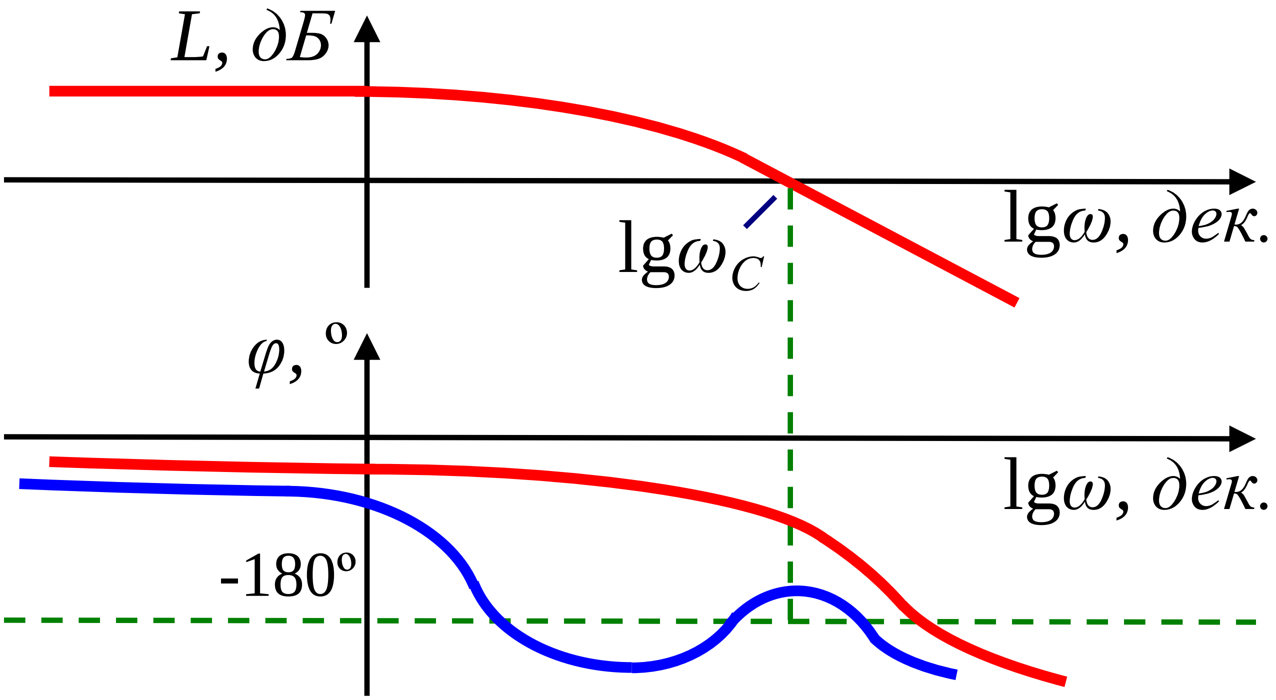
Применение критерия Найквиста для системы с неединичной обратной связью



$$W_0(p) = W_1(p) \cdot W_2(p)$$

Логарифмическая форма критерия Найквиста

Для устойчивости замкнутой линейной системы необходимо и достаточно, чтобы на всех частотах, где ЛАЧХ разомкнутой системы положительна, фазовый сдвиг не достигал -180° или достигал его четное число раз.



Метод D-разбиения

Это частотный метод, который позволяет определить значения параметров исследуемой системы, соответствующих устойчивой работе.

Если изменяемый параметр один, то используется Д-разбиение в плоскости одного параметра.

Характеристическое уравнение:

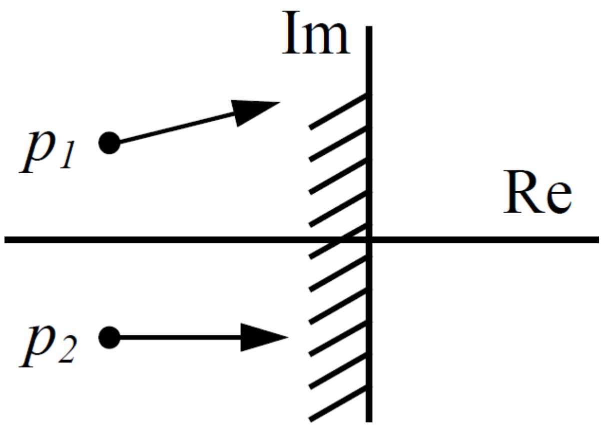
$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0$$

Определим, как влияет значение параметра a_{n-1} на устойчивость системы. Обозначим $\tau = a_{n-1}$ и разрешим уравнение относительно τ.

Метод D-разбиения

$$a_{n-1} = \tau(p) = \frac{-a_n p^n - a_{n-2} p^{n-2} \ldots - a_1 p - a_0}{p^{n-1}}$$

Рассмотрим комплексную плоскость корней характеристического уравнения.



При изменении параметра τ корни начинают перемещаться в комплексной плоскости. Мнимая ось, являющаяся границей устойчивости, при каком-то определенном τ оказывается пройденной.

В методе Д-разбиения мнимая ось отображается в комплексной плоскости параметра τ.

Метод D-разбиения

$$a_{n-1} = \tau(p) = \frac{-a_n p^n - a_{n-2} p^{n-2} \ldots - a_1 p - a_0}{p^{n-1}}$$

Заменяя p на $j\omega$, переходим в частотную область:

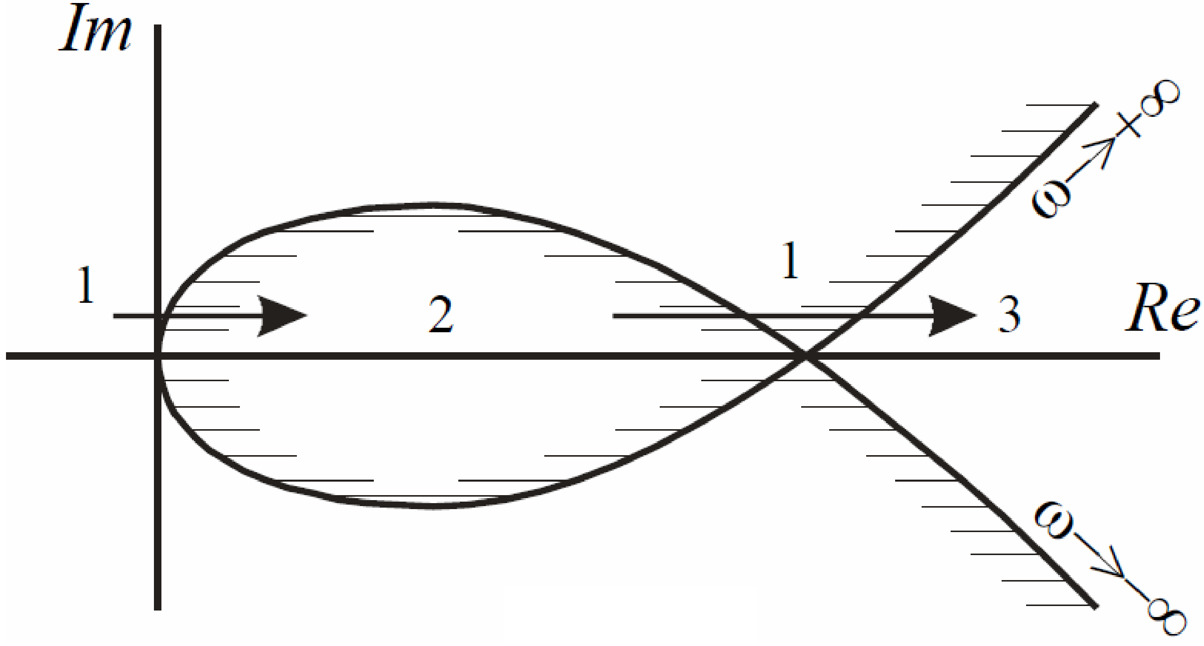
$$\tau(j\omega) = \frac{-a_n (j\omega)^n - a_{n-2} (j\omega)^{n-2} \ldots - a_1 (j\omega) - a_0}{(j\omega)^{n-1}} =$$

$$= \mathrm{Re}(\omega) + j\,\mathrm{Im}(\omega)$$

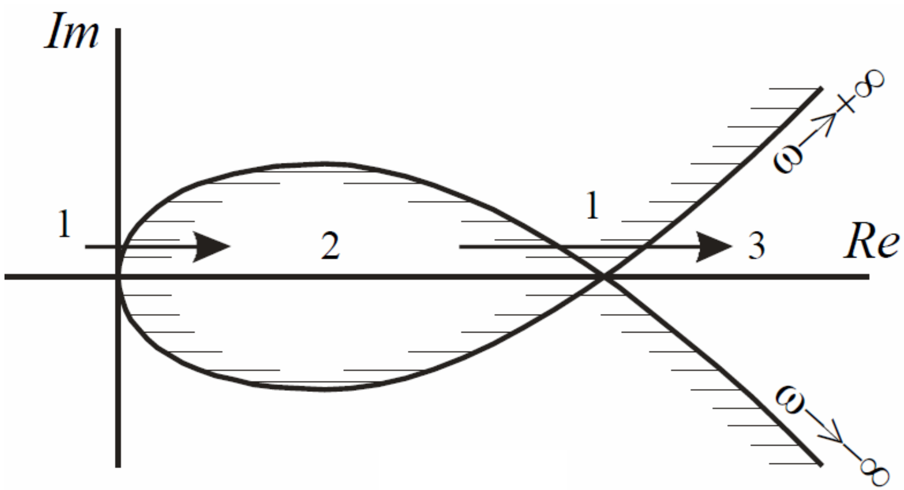
Метод D-разбиения

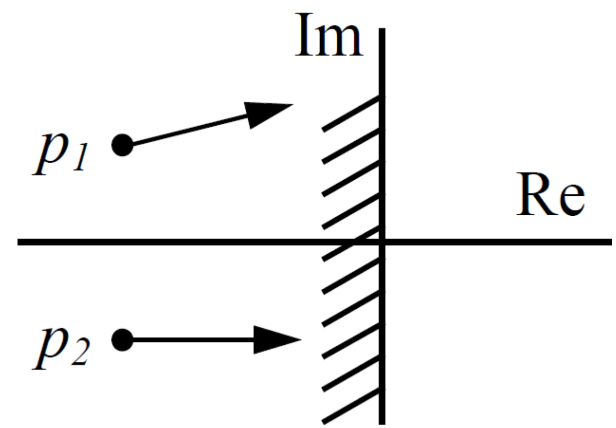
$$\tau(\omega) = \mathrm{Re}(\omega) + j\,\mathrm{Im}(\omega)$$

Задаваясь частотой от $-\infty$ до $+\infty$, строим кривую $\tau(\omega)$, которая есть отображение мнимой оси на комплексной плоскости параметра $\tau(\omega)$ – кривая Д-разбиения.



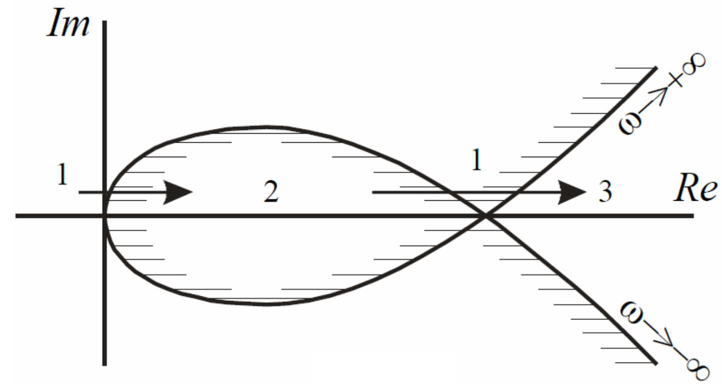
Метод D-разбиения





1. Разрешаем характеристическое уравнение относительно параметра.
2. Строим кривую Д-разбиения.
3. Двигаясь вдоль кривой по частоте от **-**∞ до **+**∞, заштриховываем левую часть кривой Д-разбиения.
4. Определяем область, претендующую на устойчивость.

Определение области, претендующей на устойчивость



Допустим, изменяя параметр τ, мы двигаемся вдоль вещественной оси в положительном направлении из области 1 → 2 → 1 → 3. Тогда:

− полагаем, что в области 1 из n корней имеется k правых;

− переходя из области 1 в область 2 хотя бы один корень стал отрицательным и тогда имеем (k-1) правых корней;

− из 2 → 1 снова k правых корней;

− из 1 → 3 (k+1) правых корней.

Таким образом, в области 2 наименьшее число правых корней.

Метод D-разбиения

1. Разрешаем характеристическое уравнение относительно параметра.
2. Строим кривую Д-разбиения.
3. Двигаясь вдоль кривой по частоте от **-**∞ до **+**∞, заштриховываем левую часть кривой Д-разбиения.
4. Определяем область, претендующую на устойчивость.
5. Проверяем устойчивость системы при любом значении параметра из найденной области.